Доклады Академии наук СССР

1989. Том 308, № 6

УДК 550.3:517.97 ГЕОФИЗИКА

© Академик А.С. Алексеев, Г.Н. Ерохин

КОМПЛЕКСИРОВАНИЕ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ГЕОФИЗИКИ

(ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОФИЗИКА)

В теоретической геофизики за последние три десятилетия интенсивно исследуются обратные задачи отдельных геофизических методов – гравики [1], электроразведки [2], сейсмики [3-6], методов, основанных на потенциальных геофизических полях [7].

Однако при практическом изучении внутреннего строения Земли и поиске полезных ископаемых обычно для повышения эффективности исследований используется одновременно некоторая совокупность геофизических методов, дающих изучаемому геологическому объекту более разностороннее описание, чем отдельно взятый метод. Правда, при таком использовании нескольких методов каждый из них фактически применяется автономно и дает достаточно определенную (однозначную и устойчивую) информацию не всегда. Комплексированию подвергаются автономно полученные результаты отдельных методов без привлечения комплексных математических моделей, а поэтому и без получения мотивированного на физико–математическом уровне количественного результата комплексирования.

В работах [8,9] предприняты попытки совместить модели различных методов в рамках единой постановки обратных задач геофизики (интегральная геофизика). Такого же типа подход использован в работе [10]. Кроме теоретических работ, на тему постановок обратных задач интегральной геофизики в последнее время появляются системотехнические подходы по формированию интегральной информационной среды [11].

Все подобные подходы нуждаются прежде всего в формировании интегральных математических моделей и в теоретическом их анализе.

В настоящей работе показано, что при совместной обработке полей различной геофизической природы с помощью совмещенных на статистическом уровне обратных задач происходит расширение множества корректности (множества гарантированной единственности и устойчивости) и повышается точность определения параметров среды. Предлагается конструктивный метод решения совмещенных обратных задач, основанный на минимизации некоторого интегрального целевого функционала.

Рассмотрим семейство операторных уравнений

$$(1) \qquad \mathfrak{M}_\nu \mathrm{u}_\nu = \mathrm{f}_\nu(x,t),$$

где $x \in D \subseteq R^n$, $t \in [0,\mathrm{T}]$, $\nu = 1,\dots,m$, $\mathfrak{M}_\nu$ - некоторый матричный размерностью $\mathrm{N}_\nu \times \mathrm{N}_\nu$ дифференциальный оператор порядка $k_\nu \le 2$. Система уравнений (1) описывает различные геофизические поля $\mathrm{u}_\nu = (\mathrm{u}_{1\nu}, ..., \mathrm{u}_{\mathrm{N}\nu})$, возбуждаемые источниками $\mathrm{f}_\nu = (f_{1\nu}, ..., f_{\mathrm{N}\nu})$, возможно, совершенно различной физической природы.

Пусть $Q = D \times [0, \mathrm{T}]$, $q = (x, t) \in Q$ и на ∂Q заданы соответствующие начальные и граничные условия, обеспечивающие единственность решений семейства прямых задач для m уравнений (1) в некоторых достаточно гладких классах функций.

Предположим далее, что операторы $\mathfrak{M}_\nu = \mathfrak{M}_\nu \left(d_\nu(x), D_x, \partial / \partial t \right)$ известны точностью до вектор–функций $d_\nu(x) = \left(d_{1\nu}(x), ..., d_{L\nu}(x) \right)$, которые носят случайный характер, подчиняются многомерным нормальным распределениям известными векторами математических ожиданий и ковариационными матрицами и удовлетворяют I - детерминированным уравнениям связи вида $F_i \left(d_\nu(x) \right) = 0, i = 1, ..., I$. Пусть связи таковы, что позволяют выделить $L = \sum_{\nu=1}^{m} L_\nu - I$ независимых параметров в математических моделях комплексируемых методов. Обозначим эти параметры через обобщенный вектор $\underline{\eta}(x) = \left(\eta_1(x), ..., \eta_L(x) \right)$ и представим уравнения связи в виде $d_\nu = d_\nu(\underline{\eta})$. С учетом этого будем предполагать в дальнейшем, что нам известны априорные средние $\underline{\eta}_0(x)$ и матрицы ковариаций $\Gamma_\eta(q, q'), q, q' \in Q$.

Обратная задача по комплексной количественной интерпретации геофизических наблюдений заключается в нахождении обобщенного вектора параметров $\underline{\eta}(x)$ семейства операторов $\{\mathfrak{M}_\nu\}, \nu = 1, ..., m$, по информации вида

$$(2) \qquad \mathrm{v}_\nu(r, t) = u_\nu \left(r, t; d_\nu(\underline{\eta}) \right) + \underline{\varepsilon}_\nu(r, t)$$

Здесь $r \in R_\nu \subset D$, R_ν - некоторое многообразие, на котором измеряется информация для ν -го метода, $\varepsilon_\nu(r, t)$ - случайная помеха, имеющая нормальное распределение с нулевым средним и известной ковариационной матрицей $\Gamma_{\varepsilon_\nu}(q, q')$. Предполагается также, что шум ε_ν статистически независим по ν.

Отметим здесь, что в силу предположения о случайной природе искомого вектора и наличии шума $\varepsilon_\nu(r, t)$ в данных (2) решение обратной задачи в интегральной постановке следует понимать как нахождение оптимальной оценки $\hat{\underline{\eta}}(x)$ для обобщенного вектора параметров $\underline{\eta}(x)$ [12].

Лемма 1. Пусть ковариационные матрицы $\Gamma_{\eta,} \Gamma_{\varepsilon_\nu}, \nu = 1, 2, ..., m,$ *имеют вид*

$$\Gamma_\eta(q, q') = G_\eta(x) \delta(t) \delta(q - q'), \Gamma_{\varepsilon_\nu}(q) \delta(q - q'),$$

где $G_{\eta,} G_{\varepsilon_\nu}$ *- симметричные положительно определенные матрицы размерностью* $L \times L u \mathrm{N}_\nu \times \mathrm{N}_\nu$ *соответственно.*

Тогда задача нахождения оптимальной оценки $\hat{\eta}$ *по методу максимума апостериорной плотности вероятности эквивалентна поиску обобщенного вектора параметров* η*, доставляющего минимум функционалу.*

$$(3)\qquad J(\eta)=\sum_{\nu=1}^{m}\Big\langle\Big(\mathrm{v}_\nu-\mathrm{u}_\nu\big(q;d_\nu(\underline{\eta})\big)\Big),\Big(\mathrm{v}_\nu-u_\nu\big(q;d_\nu(\underline{\eta})\big)\Big)\Big\rangle_{B1}+\Big\langle\big(\underline{\eta}-\underline{\eta}_0\big),\big(\underline{\eta}-\underline{\eta}_0\big)\Big\rangle_{B2}.$$

Здесь $\langle,\rangle_B$ *- скалярное произведение вектор - функций в гильбертовом весовом пространстве* H_B *:*

$$(4)\qquad \langle \mathrm{a},\mathrm{b}\rangle_B=\int_Q \mathrm{a}^T(q)B(q)\mathrm{b}(q)\,dq,$$

$$(5)\qquad B_1(q)=G_{\varepsilon_\nu}^{-1}\delta_{R\nu},$$

$$(6)\qquad B_2(q)=G_\eta^{-1}(x)\delta(t),$$

а $\delta_{R\nu}$ *- обобщенная функция нулевого порядка, носитель которой совпадает с многообразием* R_ν.

Д о к а з а т е л ь с т в о основывается на теореме Байеса и использовании априорных статистических предположений о шуме и искомых параметрах вектора $\underline{\eta}$.

Рассмотрим далее сопряженное уравнение

$$(7)\qquad \mathfrak{M}_\nu^*\mathrm{u}_\nu^*=g_\nu(x,t)$$

с нулевыми краевыми и начальными условиями в области $Q=D\times[0,\mathrm{T}]$ (последние в случае гиперболического оператора $\mathfrak{M}_\nu$ имеет вид: $\mathrm{u}_\nu^*\big|_{t=T}=0,\quad \mathrm{u}_{\nu t}^*\big|_{t=\mathrm{T}}=0$. Можно показать, что для решения уравнения (7) и решения u_ν уравнения (1) с нулевыми краевыми и начальными условиями (последние для гиперболического оператора имеют стандартный вид: $\mathrm{u}_\nu\big|_{t=0}=0,\mathrm{u}_\nu\big|_{t=0}=0$) имеет место равенство

$$(8)\qquad \langle \mathrm{u}_\nu,g_\nu\rangle_{B_0}=\langle \mathrm{u}_\nu^*,\mathrm{f}_\nu\rangle_{B_0}.$$

Здесь B_0 - единичная матрица скалярного произведения (4).

Отметим в этой связи некоторые особенности фундаментального решения сопряженного уравнения (7) в случае гиперболического оператора $\mathfrak{M}_\nu$. Пусть, например, $\mathfrak{M}_\nu$ - волновой оператор с постоянной скоростью распространения a. Тогда фундаментальное решение сопряженной задачи будет иметь вид

$$(9)\quad \mathcal{E}_+(x,t)=\frac{\theta_+(t-\mathrm{T})\delta\big(|x|+\theta(t-\mathrm{T})\big)}{4\pi a|x|},\quad \theta_+(t)=\{^{1,t\le 0,}_{0,t>0.}$$

Таким образом, в сопряженной задаче время изменяется в сторону отрицательных значений – от T и 0, тогда как для волнового уравнения с фундаментальным решением вида

$$\mathcal{E}_-(x,t)=\frac{\theta_-(t)\delta\big(|x|+\theta(t-T)\big)}{4\pi a|x|},\theta_+(t)=\begin{cases}1,t\le 0,\\0,t<0,\end{cases}$$

оно может изменяться только в сторону положительных значений – от 0 к T.

Лемма 2. Пусть $\mathrm{u}_\nu^*(x,t)$ *- решение сопряженного уравнения (7) с правой частью*

$$(10)\qquad g_\nu(x,t)=\Big(\mathrm{v}_\nu(r,t)-\mathrm{u}_\nu\big(r,t;\mathrm{d}_\nu(\underline{\eta})\big)\Big)G_{\varepsilon_\nu}^{-1}\delta_{R_\nu}$$

и нулевыми начально-краевыми условиями. Тогда при условии выполнения неравенства

$$(11) \qquad \sum_{\nu=1}^{m}\int_{Q}\left\|\left(\frac{\partial \mathrm{u}_{\nu}}{\partial \underline{\eta}}\right)^{\mathrm{T}} G_{\in_{\nu}}^{-1}\frac{\partial \mathrm{u}_{\nu}}{\partial \underline{\eta}}+G_{\eta}^{-1}\right\| dq \le c_0^2 ,$$

где c_0 *- произвольная константа, а норма под знаком интеграла означает евклидову норму матрицы размерностью* $L \times L$*, производная Фреше функционала (3) существует и представляется в виде*

$$(12) \qquad J_{\eta}\left(\underline{\eta}\right)=2\left(\sum_{\nu=1}^{m}\int_{0}^{T}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}_{\nu}}{\partial \underline{\eta}}\right)^{T}\mathrm{u}_{\nu}\mathrm{u}_{\nu}^{*}dt+G_{\eta}^{-1}\left(\underline{\eta}-\underline{\eta}_0\right)\right)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о осуществляется на основе возмущения функционала (3). Условие (11) является достаточным условием существования производной Фреше. Сама же функциональная производная (12) определяется на основе метода возмущения уравнений (1) с использованием соотношения (8).

З а м е ч а н и е 1. Задача решения сопряженного уравнения (7) с правой частью (10) в случае гиперболического оператора $\mathfrak{M}_{\nu}$ тесно связана с широко известной сейсморазведочной задачей продолжения волнового поля [13], а также с обращением оптического волнового фронта на основе использования нелинейных оптических сред (динамическая голография) [14]. Действительно, в соответствии со структурой фундаментального решения (9) сопряженного уравнения (7) источники вида (10) начинают излучать в момент времени $t=\mathrm{T}$ информацию, зарегистрированную «последней» по времени, а в момент окончания излучения $\left(t=0\right)$ в среду генерируются сигналы, зарегистрированные при наблюдении «первыми». Решение сопряженной задачи широко используют в метеорологии в задачах охраны окружающей среды [15], где решение $\mathrm{u}_{\nu}^{*}\left(x,t\right)$ носит название функции ценности.

О п р е д е л е н и е 1.Обозначим $\mathcal{M}_{\eta_o}^{c}$ совокупность вектор-функций $\underline{\eta}(x)$ таких, что для них выполняется неравенство

$$(13) \qquad \left\langle\left(\underline{\eta}-\underline{\eta}_0\right),\left(\underline{\eta}-\underline{\eta}_0\right)\right\rangle_{B_2} \le c^2 .$$

Здесь скалярное произведение определяется формулами (4), (6), $\underline{\eta}_0$ - априорное среднее, с-некоторая константа. Нетрудно показать, что $\mathcal{M}_{\eta_o}^{c}$ является выпуклым и слабокомпактным подмножеством весового гильбертова пространства H_{B_2}.

Л е м м а 3. Пусть $\mathcal{M}_{\eta_0}^{c}$ - некоторое фиксированное множество вектор функций $\underline{\eta}(x)$ вида (12), для которых выполнены условия лемм 1,2. Предположим также, что для произвольных $\underline{\eta}^1,\underline{\eta}^2 \in \mathcal{M}_{\eta_0}^{c}$ имеет место неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{m}\int_{Q}\left(\mathrm{u}_{\nu}^{1*}\left(\left(\frac{\partial \mathfrak{M}_{\nu}}{\partial \underline{\eta}^1}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{u}_{\nu}^{1}\right)^{\mathrm{T}}-\mathrm{u}_{\nu}^{2*}\left(\left(\frac{\partial \mathfrak{M}_{\nu}}{\partial \underline{\eta}^2}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{u}_{\nu}^{2}\right)^{\mathrm{T}}\right)\left(\underline{\eta}^1-\underline{\eta}^2\right)dq+2c^2 \ge 0 ,$$

где u_v^i, u_v^{i*} - решения уравнений (1) и (7) при фиксированных $\underline{\eta}^1, i=1,2$. Тогда решение обратной задачи (1), (2) на множестве $\mathcal{M}_{\underline{\eta}_0}^c$ существует, единственно и любая минимизирующая последовательность $\left\{\underline{\eta}^j\right\} \in \mathcal{M}_{\underline{\eta}_0}^c,\ j=1,2...$, слабо сходится к нему независимо от начального приближения.

Д о к а з а т е л ь с т в о основывается на леммах 1,2 и установлении сильной выпуклости функционала (3) на множестве $\mathcal{M}_{\underline{\eta}_0}^c$.

З а м е ч а н и е 2. Множество $\mathcal{M}_{\underline{\eta}_0}^c$ в теории условно-корректных задач носит название множества корректности. Параметр c имеет смысл радиуса этого множества.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть Y_m - наибольшее из множеств корректностей $\mathcal{M}_{\underline{\eta}_0}^c, c>0$, на каждом из которых для m комплексируемых методов выполнены условия лемм 1-3. Назовем множество Y_m предельным множеством корректности для методов с индексами $v=1,...,m$.

Т е о р е м а 1. Пусть $\left\{Y_m\right\},\ m=1,...,M,$- совокупность, предельных множеств корректностей для M обратных задач интегральной геофизики (1), (2), каждая из которых заключается в комплексировании m методов $\left(v=1,...,m\right)$. Тогда имеет место вложение множеств Y_m вида $Y_1 \subset Y_2 \subset ... \subset Y_M$, причем радиус ρ_κ κ-го предельного множества корректности определяется рекуррентным соотношением: $\rho_1 = s_1, \rho_\kappa = \left(\rho_{\kappa-1}^2 + s_\kappa^2\right),\quad \kappa=2,...,M$, где κ- радиус корректности отдельно взятого κ-го метода.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из лемм 1-3.

Рассмотрим далее вопросы точности и устойчивости решения комплексной обратной задачи (1), (2). Как известно, точность определения исходных параметров характеризуется величиной дисперсии их оценки. Пусть σ_ι- дисперсия оценки l компоненты вектора $\underline{\eta} = \left(\underline{\eta}_1,...,\underline{\eta}_L\right)$ в интегральной постановке обратной задачи, σ_{vl}- аналогичная оценка, получаемая при решении задачи лишь методом с индексом v, σ_l^0- квадратичный корень из l-го диагонального элемента матрицы, обратной к ковариационной матрице $G_{\underline{\eta}}$. Устойчивость решения обратной задачи, как известно, зависит от «овражности» целевого функционала, которая, в свою очередь, характеризуется показателем обусловленности матрицы Фишера [12]. Чем меньше этот показатель, тем меньше «овражность», т.е. выше устойчивость и минимальная точность решения $\left(\min\limits_l\left\{\sigma_l\right\}\right)$. Пусть ζ -показатель обусловленности матрицы $G_{\underline{\eta}}^{-1}, \xi_v$- показатель обусловленности матрицы Фишера v-го метода, ξ- показатель обусловленности матрицы Фишера в интегральной постановке.

Т е о р е м а 2. *Решение комплексной обратной задачи (1), (2) на множестве корректности* $\mathcal{M}_{\underline{\eta}_0}^c$ *характеризуется оценками точности и устойчивости вида*

$$\sigma_l^2 \le 2^{2^{(1-m)}} \max_{v=1,m}\{\sigma_{vl}\}\sigma_l^0, l=1...,L,$$
$$\xi \le \max\{\zeta,\psi\}, \psi \le \max_{v=1,m}\{\xi_v\}$$

Доказательство основывается на леммах 1,2 и свойствах симметричных положительно определенных матриц.

Замечание 3. Знаки равенства в оценке устойчивости (случай, когда устойчивость и точность не повышаются при комплексировании) возможны лишь при одновременном выполнении следующих трех условий: нет корреляционной зависимости между искомыми параметрами вектора $\underline{\eta}$ (матрица $G_{\underline{\eta}}$ диагональная); нет пересекающихся параметров в используемых математических моделях; нет однозначно разрешимых детерминированных уравнений связи на компоненты векторов d_v.

Замечание 4. Согласно оценке дисперсии σ_l, при увеличении количества методов интегральная точность определения параметров в целом повышается. Однако прямое использование метода с большой собственной дисперсией σ_{vl}, несмотря на малый его вклад в функционал (3), может, тем не менее, ухудшить общую картину. Чтобы избежать этого, необходимо, по-видимому, при численном решении привлекать принципиально иную априорную информацию – накопленные знания экспертов о комплексной интерпретации конкретных геологических объектов. Такая технология количественного решения задач интегральной геофизики возможна на базе использования гибридных экспертных систем.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
24 8 1988

Литература

1. *Новиков П.С.*-ДАН, 1938,т.18,с.165-168. 2. *Тихонов А.Н.*-ДАН,1943,т. 39, №5,с. 195-198. 3. *Алексеев А.С.* – Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1962, № 11, с. 1514-1531. 4. *Алексеев А.С.* В кн.: Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука,1967, с. 9-84. 5. *Благовещенский А.С.* В кн.: Проблемы математической физики. Л.: Изд-во ЛГУ, 1966, вып. 1, с. 68-81. 6. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1980. 263 с. 7. *Страхов В.Н.* – Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1962, № 3\4, с. 9, 307-316, 336-347, 491-507. 8. *Алексеев А.С.*, Бубнов Б.А. – ДАН, 1981,т.261,№ 5, с. 1086-1090. 9. Голиздра Г.Я. – Изв. АН СССР. Сер. геофиз.,1978,№ 6, с. 26-38. 10. *Аниконов Ю.Е.*, *Ерохин Г.Н.* В кн.: Методы исследования неклассических задач математической физики. Новосибирск, 1985, с. 55-63. 11. *Hodgson R.N. Ross R.C.*- Oil and Ges.J., 1983, №5, p.115-126. 12. *Гольцман Ф.Н., Калинина Т.Ю.* Статистическая интерпретация магнитных и гравитационных аномалий, Л.: Недра,1983.252с. 13. *Алексеев А.С., Цибульчик Г.М.*- ДАН, 1978,т.242,№ 5,с.1030-1033. 14.*Зельдович Б.Я., Шкунов В.В.*- В мире науки, 1986, № 2, с.16-24. 15. *Марчук Г.И.*- ДАН, 1976, т.227,№5,с. 1056-1059.